Soluzioni 2º esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica A.A. 2005–2006; 25–02–06

Gli studenti che sostengono il presente esame ed avranno la verbalizzazione di Analisi III, qualora debbano sostenere anche Complementi I, **non possono** portare il programma di Complementi I dello scorso anno. Per sapere quale programma portare si guardi la mia pagina web: www.mat.uniroma2.it/ perfetti e poi Ingegneria Elettronica 2005/2006.

Problema n.1 Ci rifacciamo alla notazione e ai simboli dell'esercizio 1 del compito del 18-02-06.
A. $A(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\big((p-2)+\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4\omega^2}\big)$ dove $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Si ottiene $y(t)=-\frac{1}{2}te^t+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}-\frac{1}{4(1+4\omega^2)}(2(1-4\omega^2)\cos(2t\omega)-8\omega\sin(2t\omega))-\frac{1}{2}\frac{e^t(t+4t\omega^2-1+4\omega^2)}{(1+4\omega^2)^2}$
B. $B(p)=\frac{1}{(p-1)^2}\big(1+\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4\omega^2}\big)$ dove $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Si ottiene $y(t)=\frac{3}{2}te^t-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}+\frac{1}{4(1+4\omega^2)}(2(1-4\omega^2)\cos(2t\omega)-8\omega\sin(2t\omega))+\frac{1}{2}\frac{e^t(t+4t\omega^2-1+4\omega^2)}{(1+4\omega^2)^2}$
C. $C(p)=\frac{1}{(p+1)^2}\big(-p+2+\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4\omega^2}\big)$ dove $y(0)=-1$, $y'(0)=0$. Si ottiene $y(t)=(3t-1)e^{-t}-\frac{1}{2}(t+1)e^{-t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4(1+4\omega^2)}(2(1-4\omega^2)\cos(2t\omega)-8\omega\sin(2t\omega))+\frac{1}{2}\frac{e^{-t}(t+4t\omega^2+1-4\omega^2)}{(1+4\omega^2)^2}$
D. $D(p)=\frac{1}{(p+1)^2}\big(-1+\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4\omega^2}\big)$ dove $y(0)=0$, $y'(0)=-1$. Si ottiene $y(t)=-te^{-t}-\frac{1}{2}(t+1)e^{-t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4(1+4\omega^2)}(2(1-4\omega^2)\cos(2t\omega)+8\omega\sin(2t\omega))+\frac{1}{2}\frac{e^{-t}(t+4t\omega^2+1-4\omega^2)}{(1+4\omega^2)^2}$

Problema n.2 Senza rifare tutti i conti richiamo l'analogo esercizio del precedente compito ed usando le stesse notazioni si ha $A(p)=\frac{-1+ap^3+ap^2+p-cp^2}{p^3(p+2)}$, $B(p)=\frac{-2p-1-cp^3-cp^2+ap^2}{p^3(p+2)}$, con $a=x'(0)$ e $c=y'(0)$. $x(t)=\mathcal{L}^{-1}(A)$, $y(t)=\mathcal{L}^{-1}(B)$,

Si ha $y_A(t)=-\frac{7}{8}+\frac{3}{4}t+\frac{1}{4}t^2+\frac{7}{8}e^{-2t}$ $\quad x_A(t)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{7}{8}e^{-2t}$

Si ha $y_B(t)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{1}{8}e^{-2t}$ $\quad x_B(t)=-\frac{7}{8}-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{1}{8}e^{-2t}$

Si ha $y_C(t)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{7}{8}e^{-2t}$ $\quad x_C(t)=-\frac{7}{8}-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t+\frac{7}{8}e^{-2t}$

Si ha $y_D(t)=-\frac{7}{8}+\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{1}{8}e^{-2t}$ $\quad x_D(t)=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{4}t-\frac{1}{8}e^{-2t}$

Problema n.3
A. $v(x,p)=\big(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^4}\big)e^{-px/a}+\frac{1}{p^4}$ da cui $u(x,t)=(\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{6}(t-\frac{x}{a})^3)H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{6}t^3$
B. $v(x,p)=\big(\frac{p}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{p^4}\big)e^{-px/a}+\frac{1}{p^4}$ da cui $u(x,t)=(\cos\omega(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{6}(t-\frac{x}{a})^3)H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{6}t^3$
C. $v(x,p)=\big(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}+\frac{1}{p^4}\big)e^{-px/a}-\frac{1}{p^4}$ da cui $u(x,t)=(\sin\omega(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{6}(t-\frac{x}{a})^3)H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{6}t^3$
D. $v(x,p)=\big(\frac{p}{p^2+\omega^2}+\frac{1}{p^4}\big)e^{-px/a}-\frac{1}{p^4}$ da cui $u(x,t)=(\cos\omega(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{6}(t-\frac{x}{a})^3)H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{6}t^3$

Problema n.4 A e B avevano gli integrali $\int_0^{+\infty}dx\frac{x^{1/3}}{x^3+a^3}$ rispettivamente con $a=1$, $a=2$. Usando il cammino di integrazione relativo al secondo integrale del recupero del 18-02-06 si ottiene $I(1-e^{i2\pi/3})=2\pi i\sum_{k=0}^{2}Resf(z_k)$ dove $f(z)=\frac{z^{1/3}}{z^3+a^3}$ e z_k sono le radici della equazione $z^3=-a^3$ ossia $z_0=ae^{i\pi/3}$, $z_1=ae^{i\pi}$ e $z_2=ae^{i5\pi/3}$. $Resf(z_k)=\lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)z^{1/3}}{z^3+a^3}=\lim_{z\to z_k}\frac{z^{1/3}}{3z^2}=-\frac{1}{3a^3}z_k^{4/3}$ e quindi $I(1-e^{i2\pi/3})=$

$$-\frac{2\pi i}{a^3}a^{4/3}(e^{i4\pi/9}+e^{-i4\pi/3}+e^{i20\pi/9}) = -\frac{2\pi i}{a^3}a^{4/3}e^{i4\pi/9}\sum_{k=0}^{2}e^{ik\frac{8\pi}{9}} = -\frac{2\pi i}{a^3}a^{4/3}e^{i4\pi/9}\frac{1-e^{i\frac{8}{9}3\pi}}{1-e^{i\frac{8}{9}\pi}} =$$
$$= -\frac{2\pi i}{a^3}a^{4/3}e^{i4\pi/9}\frac{1-e^{i\frac{2}{3}\pi}}{1-e^{i\frac{8}{9}\pi}} \text{ e quindi } I = -\frac{2\pi i}{a^3}a^{4/3}\frac{e^{i4\pi/9}}{(1-e^{i8\pi/9})} = \frac{2\pi}{a^{5/3}}(\sin\frac{4}{9}\pi)^{-1}$$

C e D. avevano gli integrali $\int_0^{+\infty} dx\frac{x^{1/4}}{x^4+a^4}$ rispettivamente con $a=1$, $a=2$. Usando il cammino di integrazione relativo al secondo integrale del recupero del 18-02-06 si ottiene $I(1-e^{i\pi/2}) = 2\pi i\sum_{k=0}^{3}Resf(z_k)$ dove $f(z) = \frac{z^{1/4}}{z^4+a^4}$ e z_k sono le radici della equazione $z^4=-a^4$ ossia $z_0 = ae^{i\pi/4}$, $z_1 = ae^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})}$ e $z_2 = ae^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi)}$, $z_3 = ae^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{15}{8}\pi)}$. $Resf(z_k) = \lim_{z\to z_k}\frac{(z-z_k)z^{1/4}}{z^4+a^4} = \lim_{z\to z_k}\frac{z^{1/4}}{4z^3} = -\frac{1}{4a^4}z_k^{5/4}$ e quindi $I(1-e^{i\pi/2}) = -\frac{2\pi i}{a^4}a^{5/4}e^{i\frac{5}{16}\pi}\sum_{k=0}^{3}e^{i\frac{5}{8}\pi k} = -\frac{2\pi i}{a^{9/4}}e^{i\frac{5}{16}\pi}\frac{1-e^{i\frac{5}{2}\pi}}{1-e^{i\frac{5}{8}\pi}}$ e quindi $I = -\frac{2\pi i}{a^{9/4}}e^{i\frac{5}{16}\pi}\frac{1}{1-e^{i\frac{5}{8}\pi}}$ da cui $I = -\frac{2\pi i}{a^{9/4}}\frac{1}{e^{-i\frac{5}{16}\pi}-e^{i\frac{5}{16}\pi}} = \frac{\pi}{a^{9/4}}(\sin\frac{5}{16}\pi)^{-1}$

Problema n.5 A e B. *V.P.* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx$ con $a=2$ e $b=1$ per A e $a=4$ e $b=2$ per B. Il valor principale è necessario in quanto il cammino di integrazione passa per una singolarità della funzione che però è scrivibile come $\frac{1}{x}h(x)$ con $h(x)$ continua in $x=0$. Infatti si ha $h(x) = \frac{e^{iax}-e^{ix}}{x(x^2+b^2)}$ e nell'intorno di $x=0$ si ha $h(x) = \frac{(ia-i)x+o(x)}{x(x^2+b^2)}$. Si considera la funzione complessa $\frac{e^{iaz}-e^{iz}}{z^2(z^2+b^2)}$ ed il cammino della figura del primo integrale del recupero del 18-02-06. Essendo gli esponenti positivi di DEVE "chiudere sopra". Inoltre l'integrale sul cerchietto dà $\gamma_2(t) = \varepsilon e^{-it}$ $-\pi\le t\le 0$, e quindi $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_2}dzf(z) = \pi\frac{a-1}{b^2}$. Dunque si ha
$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}dzf(z) + \lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3}dzf(z) + \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_4}dzf(z) + \pi\frac{a-1}{b^2} = 2\pi i\lim_{z\to ib}\frac{e^{iaz}-e^{iz}}{z^2(z+ib)}$. Si ottiene *V.P.* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx = \pi\frac{1-a}{b^2}+\frac{\pi}{b^3}(e^{-b}-e^{-ab})$.

C e D. *V.P.* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iax}-e^{-ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx$ con $a=-2$ e $b=1$ per A e $a=-4$ e $b=2$ per B. Dati gli esponenti negativi si chiude sotto e il cammino si ottiene ribaltando il cammino relativo ai casi A e B. Chiamiamo $\gamma_1,\ldots,\gamma_4$ le curve corrispondenti del cammino ribaltato. In questo caso si ha $\gamma_2(t) = \varepsilon e^{it}$ $\pi\le t\le 2\pi$, (percorsa in senso antiorario) e quindi $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_2}dzf(z) = \pi\frac{1-a}{b^2}$.
$\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}dzf(z) + \lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_3}dzf(z) + \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_4}dzf(z) + \pi\frac{1-a}{b^2} = -2\pi i\lim_{z\to-ib}\frac{e^{-iaz}-e^{-iz}}{z^2(z-ib)}$. Si ottiene *V.P.* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iax}-e^{-ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx = \pi\frac{a-1}{b^2}+\frac{\pi}{b^3}(e^{-b}-e^{-ab})$.

Problema n.6 $z_k = e^{i\frac{2\pi}{k}}$ e quindi $\sum_{k=0}^{n-1}z_k^r = \sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2r\pi}{k}} = \frac{1-e^{inr\frac{2\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$